ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Тема: Множества. Операции над множествами.

Цель работы: овладеть навыками выполнения действий над множествами.
Задание:
Выполните задание согласно варианту.

1 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество.
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{4;6;8\}; B = \{6;10;14\}$

3. Даны множества М, Р, Т. Каким будет множество $S = (M \cup P) \setminus T$, если
$M = \{3;7;8;6;0\};\quad P = \{x \mid x \in R; 0 < x \le 6\};\quad T = \{x \mid x \in R; 3 \le x < 7\}$.
Найдите его.

2 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество.
$A \cap (B \cup (A \cap C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{a;o;b\}; B = \{1;2;3\}$

3. Даны множества М, Р, Т. Каким будет множество $S = (M \cup P) \setminus T$, если
$M = \{-2;-3;0;1;3;5\};\quad P = \{x \mid x \in R; -3 < x < 3\};\quad T = \{0;1;2;3;4;6\}$.
Найдите его..

3 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество.
$A \cup (B \cap (A \cup C)) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{a;b;c\}; B = \{d;e;f\}$

3. Даны множества М, Р, Т. Каким будет множество $S = (M \cap P) \setminus T$, если
$M = \{x \mid x \in N; -5 \le x < 5\};\quad P = \{x \mid x \in R; x \in (-1;3]\};\quad T = \{x \mid x \in R; 5 \le x \le 7\}$
Найдите его.

4 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество.
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{3,7,11,d\}, B = \{7,11,d\},$

3. Даны множества М, Р, Т. Каким будет множество $S = (M \cup P) \setminus T$, если
$M = \{3;7;8;6;0\};\quad P = \{x \mid x \in R; 0 < x \le 6\};\quad T = \{x \mid x \in R; 3 \le x < 7\}$.
Найдите его.

5 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{3, 4, o\}$, $B = \{1, 3, 4, i, o\}$

3. Даны множества M, P, T. Каким будет множество $S = (M \cup P) \setminus T$, если

$M = \{3; 7; 8; 6; 0\}$; $P = \{x \mid x \in R; 0 < x \le 6\}$; $T = \{x \mid x \in R; 3 \le x < 7\}$.

Найдите его.

6 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{4; 6; 8\}; B = \{2, a\}$

3. Даны множества M, P, T. Каким будет множество $S = (M \cup P) \setminus T$, если

$M = \{3; 7; 8; 6; 0\}$; $P = \{x \mid x \in R; 0 < x \le 6\}$; $T = \{x \mid x \in R; 3 \le x < 7\}$.

Найдите его.

7 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{6, t, 5\}; B = \{6; 10; 14\}$

3. Даны множества M, P, T. Каким будет множество $S = (M \cup P) \setminus T$, если

$M = \{3; 5; 8; 6; 10\}$; $P = \{x \mid x \in R; 3 < x \le 6\}$; $T = \{x \mid x \in R; 3 \le x < 7\}$.

Найдите его.

8 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{4; 6; 8\}; B = \{10, h\}$

3. Даны множества M, P, T. Каким будет множество $S = (M \cup P) \setminus T$, если

$M = \{1; 4; 5; 6\}$; $P = \{x \mid x \in R; 0 < x \le 6\}$; $T = \{x \mid x \in R; 3 \le x < 7\}$.

Найдите его.

9 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{10, h\}; B = \{6; 10; 14\}$

3. Даны множества M, P, T. Каким будет множество $S = (M \cup P) \setminus T$, если

$M = \{3; 7; 8; 6; 0\}$; $P = \{x \mid x \in R; 0 < x \le 6\}$; $T = \{x \mid x \in R; 4 \le x < 7\}$.

Найдите его.

10 вариант

1. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество

$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$

2. Найти $A \cup B; A \cap B; A \times B; B \times A; A \setminus B.$ $A = \{4;6;8\}; B = \{10, h\}$

3. Даны множества M, P, T. Каким будет множество $S = (M \cup P) \setminus T$, если

$M = \{3;7;8;6;0\}$; $P = \{x \mid x \in R; 0 < x \le 6\}$; $T = \{x \mid x \in R; 3 \le x < 7\}$.

Найдите его.

Контрольные вопросы:

1.Что понимают под множеством?

2.Способы задания множеств.

3. Какое множество называют пустым?

4. Какое множество называют универсальным?

5. Действия над множествами.

6.Законы действий над множествами.

Теоретические сведения и примеры решения задач:

Способы задания множеств.

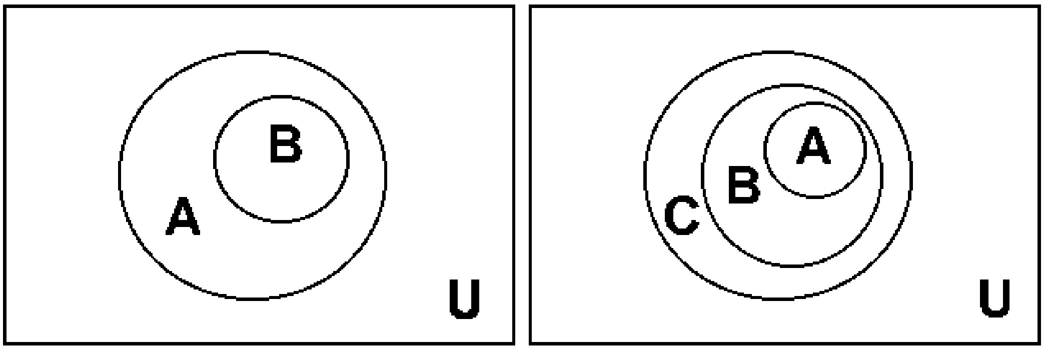
Одним из основных исходных понятий математики является понятие множества и его элементов. Множество состоит из элементов. Множества обозначаются большими латинскими буквами: A; B; C..., а их элементы – малыми буквами: a,b,c…

Если a является элементом множества A или, что то же самое, a принадлежит множеству A, то применяют запись $a \in A$; в противном случае пишут $a \notin A$.

Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов. Если множества A и B не равны, то применяется запись $A \neq B$.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным, в противном случае множество называется бесконечным. Конечное множество, содержащее n элементов, называется n-множеством.

Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается $\varnothing$. Все множества являются подмножествами некоторого множества U, называемого универсальным множеством.



а   *б*

Рис. 1.1.

Если каждый элемент a множества B, $a \in B$, является элементом множества A, $a \in A$, то B называется подмножеством множества A (рис. 1.1,а). Этот факт записывается с помощью знака включения $\subseteq$ следующим образом: $B \subseteq A$.

Свойства включения

1. $A \subseteq A$;

2. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (рис. 1.1, б);

3. Из двух включений $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$ следует, что A=B.

Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Если $B \subseteq A$ и при этом $B \neq A$, то этому соответствует запись $B \subset A$ и B называется собственным подмножеством A.

Для описания множества A, состоящего из элементов a1,a2,...,an,... обычно применяется запись A={a1,a2,...,an,...}, причём порядок элементов в фигурных скобках не имеет значения; обычно он определяется соображениями наглядности.

Пример: В записи множества первых n натуральных чисел Nn={1,2,...,n} удобно располагать числа в возрастающем порядке, хотя при этом надо иметь в виду, что

N_3 ={1,2,3}={2,1,3}={3,2,1}.

Другой способ задания множества состоит в описании свойств, однозначно определяющих принадлежность элементов данному множеству. Такому способу задания множества соответствует запись:

A={a/a обладает свойством P(a)}.

Пример: Множество чётных чисел M может быть задано так:

M={i / i – целое число, которое делится на 2 без остатка}.

В случае описания множества с помощью некоторого свойства необходимо следить за тем, чтобы каждый элемент был чётко определён. Так, например, недостаточно чётким является определение множества A как множества слов русского языка, если нет ссылки на один из толковых словарей.

Возможно также рекурсивное задание множества, при котором осуществляется последовательное описание элементов через предыдущие. Например, множество натуральных чисел рекурсивно можно задать так: N={i / если целое $i \in N$, то $i+1 \in N$, $i \geq 1$}.

Операции над множествами. Законы действий над множествами.

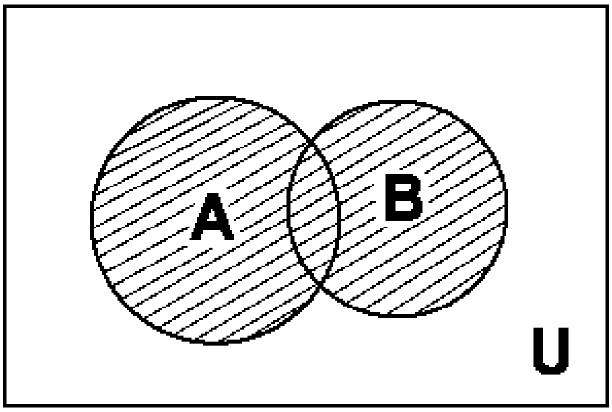
Объединением двух множеств A и B называется множество вида:

$A \cup B$={a / $a \in A$ или $a \in B$}(рис. 1.2, а).

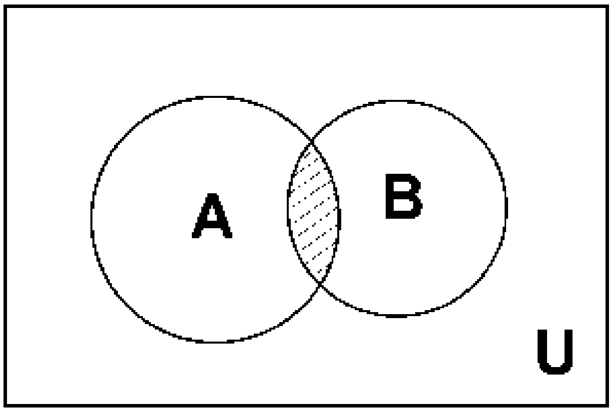
Пересечением двух множеств A и B называется множество вида:

$A \cap B$={a / $a \in A$ и $a \in B$} (рис. 1.2, б).

Если множества A и B не имеют общих элементов, то $A \cap B = \varnothing$.



а



б

Рис. 1.2.

Свойства операций объединения и пересечения

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность);

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность).

Объединение и пересечение связаны законами дистрибутивности:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

По свойству 3 операции включения следует равенство правой и левой частей доказываемого равенства.

Для операции объединения множеств нейтральным является пустое множество $\varnothing$, а для операции пересечения множеств – универсальное множество U.

Разность множеств A и B определяется следующим образом:

$A \setminus B$={a / $a \in A$и $a \notin B$} (рис. 1.3, а).

Разность не обладает свойством коммутативности; эта операция также не является и ассоциативной.

Пользуясь понятием универсального множества, можно определить дополнение $\overline{A}$ к множеству А, как разность вида: $\overline{A}$ = U \ A (рис. 1.3, б).

Пример: Пусть в качестве универсального множества выступает множество целых чисел Z и пусть A – это множество всех чётных чисел. Тогда $\overline{A}$ – это множество всех нечётных чисел.

Операции объединения, пересечения и дополнения множеств связаны между собой законами де Моргана:

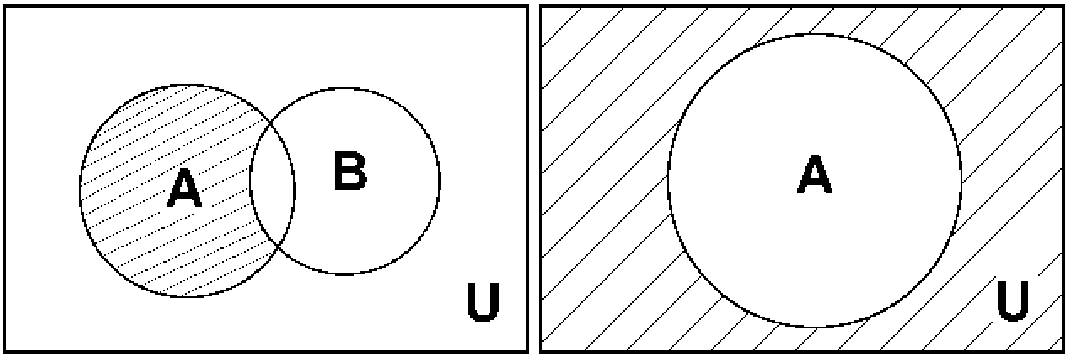
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

Если a $\in \overline{A\cap B}$, то a $\notin A\cap B$. Это значит, что или a$\in\overline{A}$, или a$\in\overline{B}$, т.е. a$\in\overline{A}\cup\overline{B}$. Следовательно, $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$.

С другой стороны, если a$\in\overline{A}\cup\overline{B}$, то или a$\in\overline{A}$, или a$\in\overline{B}$. Это значит, что a$\notin A\cap B$, т.е. a $\in\overline{A\cap B}$. Таким образом, $\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$.

Из этих двух включений следует первый закон де Моргана.

Второй закон доказывается аналогичным образом.



а *б*

Рис. 1.3.

Пример:

1. Найти $A\cup B; A\cap B; A\times B; B\times A; A\setminus B.$ $A=\{7;8;9\}; B=\{7;8;10\}$

Решение:

$$A\cup B=\{7;8;9\}\cup\{7;8;10\}=\{7;8;9;10\}$$

$$A\cap B=\{7;8;9\}\cap\{7;8;10\}=\{7;8\}$$

$$A\times B=\{7;8;9\}\times\{7;8;10\}=\{(7;7);(7;8);(7;10);(8;7);(8;8);(8;10);(9;7);(9;8);(9;10)\}$$

$$B\times A=\{7;8;10\}\times\{7;8;9\}=\{(7;7);(7;8);(7;9);(8;7);(8;8);(8;10);(10;7);(10;8);(10;9)\}$$

$$A\setminus B=\{7;8;9\}\setminus\{7;8;10\}=\{9\}.$$

2. Доказать равенство и записать двойственное ему:

$$(A\cup B)(B\cup C)(C\cup A)=ABC\cup AB\cup AC\cup BC$$

Решение:

Преобразуем левую часть:

$$(A\cup B)(B\cup C)(B\cup A)=\left(AB\cup C\right)(B\cup A)=AB\cup AB\cup CB\cup CA=$$

$$=ABC\cup AB\cup AC\cup BC$$

Таким образом, левая часть равна правой части, т.е. равенство верно.

Для того чтобы составить равенство, двойственное данному, пользуемся принципом двойственности. Заменим в данном равенстве знак $\cup$ на $\cap$ и наоборот. Чтобы не поменялся порядок действий, по другому поставим скобки. Получим двойственное равенство:

$$AB \cup BC \cup CA = (A \cup B \cup C)(A \cup B)(A \cup C)(B \cup C)$$